(24)

Here, the integration is performed over a certain given circuit L in the plane of the complex variable z, which associates the function $f(z)$ defined on L with the analytical function $F(p)$ from the complex variable $p = x + iy$.

When using a three-dimensional variable instead of a complex variable in (24), we can get

$$F(q) = \int f(z)\, exp(-qz)\, dz = \int f(z)\, exp[-(s + ix + jy)z]\, dz. \quad (25)$$

In this equation, z and q are three-dimensional variables of the form

$$q = s + ix + jy.$$

(26)

With the value $s = 0$ and the condition $ij = 0$ from (25), we can obtain an analog of the two-dimensional Fourier transformation, which has been sufficiently studied and is widely used in practice. A more detailed analysis is not provided here due to the size limits of the article.

To sum up, it should be noted that the use of hypercomplex numbers allows to apply them for mathematical and computer modeling of complex physical processes and the design of knowledge-intensive devices, including the efficient conduction of studies in the field of processing multidimensional signals, the dimension of which coincides with the dimension of hypercomplex numbers.

References

1. Kantor I.L., Solodovnikov A.S. Giperkompleksnye chisla. – M., 1973. – 144 s. (In Russ).

2. Branec V.N., Shmyglevskij I.P. Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela. – M., 1973. – 320 s. (In Russ).

3. Berezin A.V., Kurochkin Ju.A., Tolkachev E.A. Kvaterniony v reljativistskoj fizike. – M., 2003. – 200 s. (In Russ).

4. Ibrayev, A. T., Sapargaliev, A. A. (1981). Transaxial electrostatic cathode lens. Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, 51, 22–30.

5. Ibrayev A.T. Theory of Cathode Lens with Multipole Components of Electrostatic Field and the Space Charge.– Microscopy and Microanalysis, 2015, V. 21, N6, P. 270-275. https://doi.org/10.1017/S1431927615013495.

6. Dadzhion D., Mersero R. Cifrovaja obrabotka mnogomernyh signalov: Per. s angl.—M.: Mir, 1988.— 488 s, il. (In Russ).

7. Osnovy cifrovoj obrabotki signalov: Kurs lekcij / Avtory: A.I. Solonina, D.A. Ulahovich, S.M. Arbuzov, E.B. Solov'eva / Izd. 2-e. – SPb, 2005.- 768 s. (In Russ).

8. Kompleksnoznachnye i giperkompleksnye sistemy v zadachah obrabotki mnogomernyh signalov / Pod red. Ja.A. Furmana. — M.: FIZMATLIT, 2004. - 456 s. (In Russ).

9. Ibraev A.T. Mnogomernye giperkompleksnye i modificirovannye kompleksnye chisla. – Vestnik Kazahskogo Nacional'nogo tehnicheskogo universiteta imeni K.I.Satpaeva, 2009, № 6 (76), s. 153-159. (In Russ).

Information about authors:

Ibraev Alpamys Tuyakovich - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Al-Farabi Kazakh National University.

Alkhan Yerassyl Armanuly - Master's student of Al-Farabi Kazakh National University.

Toktar Adil-Yer Yerboluly - Master's student of Al-Farabi Kazakh National University.

Сведения об авторах:

Ибраев Алпамыс Туякович – доктор физико-математических наук, профессор Казахского национального университета имени Аль-Фараби

Алхан Е.А. – магистрант Казахского национального университета имени Аль-Фараби

Токтар А.Е. – магистрант Казахского национального университета имени Аль-Фараби

УДК 519.852.6

НАХОЖДЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО СУБОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПО ОГРАНИЧЕНИЯМ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ.

DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2021.4.83.1263

Мамедов Назим Нариман оглы

Доктор философии по математике, докторант

Института Систем Управления НАН Азербайджана.

АННОТАЦИЯ

В работе введены понятия гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения для целочисленной задачи о ранце. На основе одной экономической интерпретации разработан метод нахождения гарантированного субоптимального решения. С применением этого метода решена одна конкретная задача.

ABSTRACT

In this article, the concepts of a guaranteed solution and a guaranteed suboptimal solution for the integer knapsack problem are derived. A method for finding a guaranteed suboptimal solution has been developed on the basis of one economic interpretation. Using this method, one specific problem was solved.

Ключевые слова: целочисленная задача о ранце, гарантированное решение и гарантированное субоптимальное решение по ограничениям целочисленной задачи о ранце, принцип дихотомии, вычислительные эксперименты.

Keywords: Integer knapsack problem, guaranteed solution and guaranteed suboptimal solution with respect to constraints of the integer knapsack problem, dichotomy principle, computational experiments.

1.Введение: Рассмотрим следующую задачу целочисленного программирования с одним ограничением, то есть целочисленную задачу о ранце :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \to \max, \ (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ \le b\ , (2)$$

$$0 \le x_j \le \ d_j, (j = \ \overline{1,n}\ ) \text{ и целые}. (3)$$

Не умаляя общности, мы предполагаем, что, $c_j > 0, a_j > 0, d_j > 0, (j = \ \overline{1,n})$ и $b > 0$ заданные целые число.

Отметим, что задача (1) - (3) известна из литературы [1-8 и др.] и называется целочисленной задачей о ранце. Поскольку задача (1) - (3) входит в класс NP-полных, то не существуют алгоритмы полиномиальной сложности для нахождения её оптимального решения [9]. Однако, в случае, когда количество неизвестных невелико, существуют различные методы решения этой проблемы, такие как метод ветвей и границ, динамическое программирование или комбинаторные методы [1, 4, 5, 7, 10 - 12 и др.].

В данной работе мы не предлагаем какой-нибудь новый метод для задачи (1)-(3).

Цель данной работы заключается в том, что на основе некоторой экономической интерпретации этой задачи, найти такое решение, которое гарантировало, чтобы значение функции (1) было не меньше, чем заранее фиксированного.

Отметим, что в работах [13-17, и.т.д.] введены понятия гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения по правой части ограничения (2) и по коэффициентам функции (1) и разработаны методы их построения. В отличие от этих работ, в данной работе разработан метод построения гарантированного субоптимального решения по ограничениям, принимая что, не меняется правая часть ограничения (2) и коэффициенты функции (1).

Отметим, что задача, которая рассмотрена в данной работе, строго отличается от параметрической целочисленной задачи о ранце. В параметрических задачах требуется найти такие изменения коэффициентов, в которых оптимальное решение не меняется.

А в данной работе требуется, найти такое решение, которое гарантирует увеличение значения целевой функции относительно фиксированного, за счёт минимального изменения коэффициентов ограничений в заданном интервале.

2.Постановка задачи: Прежде всего дадим некоторые экономические интерпретации для задач (1)-(3). Допустим, что некоторое предприятие (компания, производственная отрасль и т.д.) должна производить n тип штучных товаров. Пусть для производства каждой единицы $j -$ того, $(j = \overline{1,n})$ продукта требуется средств (ресурс и.т.д.) в объеме a_j, $(j = \overline{1,\text{n}})$ единиц. Здесь требуется, найти сколько штук нужно произвести из каждого товара, чтобы общая прибыль была максимальной и суммарный ресурс не превышал выделенный лимит. Очевидно, что математическая модель этой задачи будет в виде (1)-(3).

Допустим, что некоторым методом найдены оптимальное $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots\ x_n^*)$ или субоптимальное (приближенное) $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots\ x_n^s)$ решение задачи (1)-(3) и вычислены соответствующее значение функции (1)

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \ \text{ или } f^s = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^s\ .$$

Допустим, что требуется получить значение функции (1), больше чем f^* или f^s. Другими словами, необходимо найти такое субоптимальное решение $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots\ x_n^z)$ или $X^{zs} = (x_1^{zs}, x_2^{zs}, \dots\ x_n^{zs})$, чтобы удовлетворялись следующие неравенства :

$$f^z \ge \ f^* \ + \ \Delta^z \ \textit{или}\, f^{zs} \ge \ f^s \ + \ \Delta^{zs}\ .$$

Здесь

$$f^z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^z \ \ , f^{zs} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{zs} \ , \Delta^z = \ \left[f^* \frac{p}{100}\right] \text{ или } \Delta^{zs} = \ \left[f^s \frac{p}{100}\right],$$

и число p означает процентный прирост значения f^* или f^s и заранее задано, а обозначение $[z]$ означает целую часть числа z. Решение $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots\ x_n^z)$ или

$X^{zs} = (x_1^{zs}, x_2^{zs}, \dots x_n^{zs})$ называется гарантированное решение или гарантирование субоптимальное решение, соответственно.

Для достижения этой цели, как указано выше, без изменения выделенного ресурса b и прибыли $c_j, (j = \overline{1,n}\ )$ нужно затраты $a_j, (j = \overline{1,n}\ )$ минимально изменить в заданном интервале $[0, a_j]\ (j = \overline{1,n}\ )$

Таким образом, получаем следующую модель:

$$\delta_j \ \to min, (j = \overline{1,n}\ )\ (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \geq f^* + \Delta^z, (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - \delta_j) x_j \ \leq b, (6)$$

$$0 \leq \delta_j \leq \alpha_j, (j = \overline{1,n}\ ) \text{ и целые }, (7)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, (j = \overline{1,n}\ ) \text{ и целы}. (8)$$

Здесь $c_j > 0, a_j > 0, d_j > 0, \alpha_j > 0,$ $(j = \overline{1,n}\ ), b > 0, f^*, \Delta^z$ заданные целые числа, x_j и $\delta_j, (j = \overline{1,n}\ )$ неизвестные. Очевидно, что после решения этой задачи затраты $a_j > 0, (j = \overline{1,n}\ )$ должны минимально уменшаться на $\delta_j, (j = \overline{1,n}\ )$ единиц.

Прежде всего, отметим, что задача (4)- (8) является многокритериалной и нелинейной задачей целочисленного программирования. Естественно, что это задача также входит в класс NP-полных, т.е. «труднорешаемых». Поэтому в задаче (4)-(8) заменяя f^* и Δ^z, соответственно f^s и Δ^{zs}, получаем следующую аналогичную модель.

$$\delta_j \ \to min, (j = \overline{1,n}\ )\ (9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \geq f^s + \Delta^{zs}, (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - \delta_j) x_j \ \leq b, (11)$$

$$0 \leq \delta_j \leq \alpha_j, (j = \overline{1,n}\ ) \text{ и целые }, (12)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, (j = \overline{1,n}\ ) \text{ и целые }. (13)$$

Как видно из условий (11) и (12), должны выполняться условия $\alpha_j < a_j, (j = \overline{1,n}\ )$. С другой стороны, задача (9)-(13) является нелинейной задачей целочисленного программирования (см. ограничение (11)).

3: Теоретическое обоснование метода: Сначала введём следующие определения.

Определение 1. Допустимое решение задачи (4)-(8) называется вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, который удовлетворяет ограничениям (5)-(8) при каждом фиксированном значении $\delta_j, (j = \overline{1,n}\ )$.

Определение 2. Допустимое решение $X^z = (x_1^z, x_2^z, \dots x_n^z)$ задачи (4) - (8) называется гарантированным решением по коэффицентам ограничений в задаче (1) - (3), если параметры $\delta_j, (j = \overline{1,n}\ )$ получают минимальные значения.

Очевидно, что нахождение гарантированного решения задачи (4) - (8) связано серьёзными трудностями, особенно если число неизвестных большой. Поэтому разработка метода нахождения гарантированного субоптимального решения этой задачи за реальное время представляет несомненный интерес. С этой целью введём следующее определение.

Определение 3. Допустимое решение $X^{zs} = (x_1^{zs}, x_2^{zs}, \dots x_n^{zs})$ задачи (9)-(13) называется гарантированным субоптимальным решением задачи (1)-(3) по коэффициентам ограничений, если параметры $\delta_j, (j = \overline{1,n}\ )$ принимают минимальные значения.

В данной работе разработан один метод для нахождения гарантированного субоптимального решения задачи (9) - (13).

Метод заключается в следующем: Прежде всего, отметим, что для задачи (1)-(3) относительно "b " в правой части ограничение (2) и для коэффицентов функционала (1) $c_j, (j = \overline{1,n}\ )$ в работах [13-17] введены понятий гарантированного решения и разработаны соответствующие, методы их нахождения.

А в данной работе предполагается, что выделенный ресурс b и цены $c_j, (j = \overline{1,n}\ )$ фиксированы, только расходы $a_j, (j = \overline{1,n}\ )$ уменьшаются минимально в заданном интервале $[0, \alpha_j]$, $(j = \overline{1,n}\ )$. При этом функционал (1) должно принимать значение не меньше, чем заданного. Эта решение мы называем гарантированное решение относительно коэффициентов ограничений. Поскольку эта задача также входит в класс NP – полных (т.е. есть труднорешаемых), нами разработан алгоритм построения гарантированного субоптимального решения:

Процесс построение этого решение заключается в следующем: в начале каким-то известным методом находим субоптимальное решение $X^{s_0} = \left(x_1^{s_0}, x_2^{s_0}, \dots x_n^{s_0}\right)$ задачи (1)-(3) и соответствующее значение функционала (1)

$$f^{s_0} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{s_0}.$$

Далее вычислим значение $\Delta^s = \left[f^{s_0} \cdot \frac{p}{100}\right]$. Здесь [z] означает целую часть числа z и p является процентное приращения значение f^{s_0}.

После этого в неравенстве (10) принимая $f^s = f^{s_0}$, $\Delta^{zs} = \Delta^s$, получаем модель (9)-(13). Здесь цель заключается в том, что найти минимальное значение, $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ в интервале $[0, \alpha_j]$, $(j = \overline{1,n})$ в задаче (9) - (13), удовлетворящие условиям (10) - (13).

Поэтому в начале процесса построения решений принимая $\delta_j := \alpha_j$, $a_j' := a_j$, $(j = \overline{1,n})$. После этого принимаем $a_j := a_j' - \delta_j, (j = \overline{1,n})$. В результате получаем текущее в задаче (1)-(3) и находим субоптимальное решение $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и значение

$$f^0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

этой задачи.

Очевидно, что выполняется соотношение $f^0 > f^S + \Delta^s$. Потому, что коэффициенты $a_j, (j = \overline{1,n})$ уменьшили максимально. С целью минимизации величины $\delta_j, (j = \overline{1,n})$, используя принцип дихотомии определяем текущее значение $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ следующим образом: $\gamma_j := 0$,

$$\beta_j := \delta_j,\ t_j := \gamma_j,\ z_j := \beta_j,\ \delta_j := \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right],$$

$(j = \overline{1,n})$. После этого вычислим текущие коэффициенты $a_j := a_j' - \delta_j, (j = \overline{1,n})$. В результате получаем текущую задачу (1)-(3) , находим субоптимальное решение $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ и соответствующий значение f^1 функционала (1):

$$f^1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^1 .$$

Здесь возможно два случая:

I случай: $f^1 \geq f^s + \Delta^s$,

II случай: $f^1 < f^s + \Delta^s$

В первом случае запоминаем $f^{zs} := f^1$, $X^{zs} := X^1$ и с целью минимизации $\delta_j, (j = \overline{1,n})$ определяем последовательно следующие $\gamma_j := t_j$, $\beta_j := \delta_j$, $z_j := \beta_j$, $\bar{\delta}_j := \delta_j$, $\delta_j := \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right]$, $a_j := a_j' - \delta_j, (j = \overline{1,n})$.

Во втором случае, т.е., если $f^1 < f^s + \Delta^s$, то принимаем $\gamma_j := \delta_j$, $\beta_j := z_j$, $t_j := \gamma_j$, $\delta_j := \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right]$, $a_j := a_j' - \delta_j, (j = \overline{1,n})$.

Таким образом, получается новая текущая задач (1) – (3) . Продолжая этот процесс, в некотором шаге k определяется субоптимальное решение $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ и соответствующее значение функции (1)

$$f^k = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^k .$$

Справедлива следующая теорема:

<u>Теорем 1 :</u> Если в некотором шаге k выполняется условий $|\beta_j - \gamma_j| \leq 1$ для всех $j, (j = \overline{1,n})$, то соответсвующее решение $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ будет гарантированное субоптимальное решение по ограничениям для задачи (1) – (3).

<u>Доказательство:</u> Пусть, в $k -$ ом шаге

$$\theta_j = \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right], (j = \overline{1,n}) \quad (14)$$

является середины отрезка $[\gamma_j, \beta_j], (j = \overline{1,n})$. Допустим что, выполняется $|\beta_j - \gamma_j| \leq 1$ для любого $j, (j = \overline{1,n})$. Тогда $-1 \leq \beta_j - \gamma_j \leq 1$, $(j = \overline{1,n})$. Здесь, учитывая что β_j и $\gamma_j, (j = \overline{1,n})$ принимают целые значения, то возможно следующие 3 случаи:

I) $\beta_j - \gamma_j = -1, (j = \overline{1,n})$. Отсюда, учитывая $\beta_j = \gamma_j - 1, (j = \overline{1,n})$ в (14) получаем

$$\theta_j = = \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right] = \left[\frac{\gamma_j + \gamma_j - 1}{2}\right] = \left[\gamma_j - \frac{1}{2}\right] = [\gamma_j], (j = \overline{1,n}),$$

ибо $\theta_j \in [\gamma_j, \beta_j], (j = \overline{1,n})$.

II) $\beta_j - \gamma_j = 0, (j = \overline{1,n})$. Отсюда, учитывая $\beta_j = \gamma_j, (j = \overline{1,n})$ в (14), получаем

$$\theta_j = = \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right] = \left[\frac{\gamma_j + \gamma_j}{2}\right] = [\gamma_j], (j = \overline{1,n}),$$

ибо $\theta_j \in [\gamma_j, \beta_j], (j = \overline{1,n})$.

III) $\beta_j - \gamma_j = 1, (j = \overline{1,n})$. Отсюда, $\beta_j = \gamma_j + 1, (j = \overline{1,n})$ и подставляя это в (14) получаем

$$\theta_j = = \left[\frac{\gamma_j + \beta_j}{2}\right] = \left[\frac{\gamma_j + \gamma_j + 1}{2}\right] = \left[\gamma_j + \frac{1}{2}\right] = [\gamma_j], (j = \overline{1,n}),$$

поскольку $\theta_j \in [\gamma_j, \beta_j], (j = \overline{1,n})$.

Если во всех трёх случаях I, II, III заменяя $\gamma_j, (j = \overline{1,n})$ на $\beta_j, (j = \overline{1,n})$ и учитывая в (14), получаем что $\theta_j = \beta_j, (j = \overline{1,n})$.

Таким образом , при выполнении условия $|\beta_j - \gamma_j| \leq 1, (j = \overline{1,n})$ средняя точка $\theta_j, (j = \overline{1,n})$ в интервале $[\gamma_j, \beta_j], (j = \overline{1,n})$ совпадает либо с γ_j, либо β_j.

А это означает, что любое новое субоптимальное решение будет совпадать с последним решением $X^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$, найденное в k -ом итерации.

Теорема доказана.

Из этой теоремы видно, что процесс решения завершается при выполнении условия $\beta_j - \gamma_j \leq 1, (j = \overline{1,n})$ в некотором шаге k. Другими словами, процесс деления пополам дальше не даёт новые решения.

Отметим, что если в некоторым шаге l выполняется условия $f^l \geq f^s + \Delta^s, (1 \leq l \leq k)$, то необходимо запомнить следующие величины :

$f^{zs} := f^l$, $X^{zs} := X^l$ и $\bar{\delta}_j = \delta_j, (j = \overline{1,n})$.

Таким образом, если в k −ом шаге выполнено условия $\beta_j - \gamma_j \leq 1$ для всех $j, (j = \overline{1, n})$, то полученное последнее решение $X^{zs} = (x_1^{zs}, x_2^{zs}, \dots, x_n^{zs},)$ будет гарантированным субоптимальным решением по ограничениям и f^{zs} будет гарантированным субоптимальным значением функционала (1).

<u>3: Численный пример:</u> С применением данного метода, решим следующую задачу. Это задача опубликована в работе [17].

$$8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 3x_5 \to max \ (15)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 21 \ (16)$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 3, 0 \leq x_5 \leq 4 \text{ и целые } (17)$$

Отметим что, субоптимальное решение $X^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s,)$ задачи (1) – (3) может быть определено следующей аналитической формулой [17].

Здесь не умоляя общности, предполагается, что выполняется соотношения

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \frac{c_k}{a_k} \geq \cdots \frac{c_n}{a_n}. \ (18)$$

Тогда, для каждого $j, (j = \overline{1, n})$

$$x_j^s = \begin{cases} d_j, \text{если } \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s + a_j d_j \leq b, \\ \left[\left(b - \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s\right)/a_j\right], \text{если } \sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i^s + a_j d_j > b. \end{cases} \qquad (19)$$

Здесь [z] означает целую часть числа z .

Сначала используя формулу (19), найдём начальное субоптимальное решение задачи (15) – (17). Это будет $X^{s_0} = (x_1^{s_0}, x_2^{s_0}, \dots, x_n^{s_0},)$ = (2, 3, 0, 1, 0) и $f^{s_0} = 50$. Пусть $p = 20$ %.

Тогда $\Delta^{ZS} = \left[\frac{50}{100} 20\right] = 10$ и принимаем $f^s = f^{s_0}$.

Нам нужно найти такое решение, который удовлетворяет условия (10). Другими словами, это решение должно гарантировать, что значение функции (1) будет не меньше , чем $f^s + \Delta^{ZS} = 60$.

Учитывая выше указанные, принимаем $\delta_1 = \alpha_1 = 2, \delta_2 = \alpha_2 = 2, \delta_3 = \alpha_3 = 3, \delta_4 = \alpha_4 = 1, \delta_5 = \alpha_5 = 1$. Тогда $a_1' = 3, a_2' = 4, a_3' = 4, a_4' = 2, a_5' = 2$ и получаем $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1$.

Таким образом, текущая задача типа (15) – (17) будет

$$8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 3x_5 \to max,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 21,$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 3, 0 \leq x_5 \leq 4 \text{ и целые}.$$

Субоптимальное решение этой задачи, учитывая соотношения (18) будет $X^0 = (2, 3, 5, 3, 4)$ и $f^0 = 115 > 60$.

После этого для минимизации параметров $\delta_j, (j = \overline{1,5})$ необходимо принимать

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5) = (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = (2, 2, 3, 1, 1),$$

$$T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (2, 2, 3, 1, 1).$$

По принципам деления пополам используется формула $\delta_j := \left[\frac{\beta_j + \gamma_j}{2}\right], (j = \overline{1,5})$. Тогда $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$ и исползуя формулу $a_j = a_j' - \delta_j, (j = \overline{1,5})$ находим, что $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = 2$. В результатае текущая задача типа (15)-(17) будет иметь следующий вид:

$$8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 3x_5 \to max,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 21,$$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 3, 0 \leq x_5 \leq 4 \text{ и целые}.$$

Учитывая соотношение (18), субоптимальным решением этой задачи является

$X^1 = (2,3,2,1,0)$ и значение функции (15) соответствующее этому значению будет $f^1 = 68 > 60$.

А это соответствует вышеуказанному I −му случаю. Поэтому запоминаем $f^{ZS} = 68$ и соответствующее решение $X^{ZS} = (2,3,2,1,0)$.

После этого для минимизации параметров $\delta_j, (j = \overline{1,5})$ и принимая

$\gamma = (0,0,0,0,0), \beta = (1,1,1,0,0), Z = (1,1,1,0,0), \bar{\delta} = (1,1,1,0,0)$, можем найти новые значения $\delta_j, (j = \overline{1,5})$ по формуле $\delta_j = \left[\frac{\beta_j + \gamma_j}{2}\right]$, $(j = \overline{1,5})$. Тогда получаем $\delta = (0,0,0,0,0)$. А это показывает, что последние значения коэффициентов $a_j, (j = \overline{1,5})$ больше не может быть уменьшены. Таким образом, по выше доказанной теореме, значение $\delta = \bar{\delta} = (1,1,1,0,0)$ является минимальным. А $X^{ZS} = (2,3,2,1,0)$ является гарантированном субоптимальным решением и соответствующее гарантированное значение функции (15) составит $f^{ZS} = 68$.

Отметим, что завершение процесса решения видно из теоремы, доказанной выше.

4. Выводы: На основе вычислительного процесса решения задачи (15) - (17) можем сделать следующие выводы.

− В рассмотренной задаче, за счёт минимального уменьшения коэффициентов a_j, $(j = \overline{1,5})$, субоптимальное решение $X^{ZS} = (2,3,2,1,0)$ даёт гарантию что, соответствующее значение функции (15) будет не меньше 20% относительно начального значения $f^S = 50$.

− Гарантированное приближенное значение целовой функции относительно ограниченний составляет $f^{ZS} = 68$.

− Несмотря на то, что в постановке задачи требуется увелечение начального значения функции (15) на 20%, разработанный метод даёт приращение 36%

ЛИТЕРАТУРА

1. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969, 368 с.
2. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.
3. Емеличев В.А., Комлик В.Н. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981, 208 с.
4. Martello S., Toth P. Knapsack problems, Algorithm and Computers implementations. John Wiley & Sons, Chichster, 1990, 296 p.
5. Kellerer H., Pferschy U.,Pisinger D. Knapsack problems. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 2004, 546 p.
6. Сигал И.Х. , Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование модели вычислительине алгоритм. М. Физмат лит. , 2007, 304 ст.
7. Мамедов К.Ш. Исследование по целочисленной оптимизации (методы , алгоритмы и вычислительные эксперименты). Lambert Academic Publishing, (Германия)2012, 276 ст.
8. Мамедов К.Ш. Методы решения различных классов задач дискретной оптимизации. Баку- “ЭЛМ” -2011. 343ст.
9. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. Стр.416
10. Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). М. УРСС, 2003, 246 ст.
11. Мансимов К.Б., Мамедов К. К. Метод решения частично-целочисленной задачи о ранце сужением границы значений целевой функции и переменных. Автоматика и вычислительная техника № 4, Рига, 2010, с. 40 - 53.
12. Mamedov K. Sh., Mamedov K. K., Elchueva S. K. Solving the Mixed-Integer Knapsack Problem by Decrease of Dimension and use of Dynamic programming. Automatic Control and Computer Sience, 2015, vol 49, №4, pp 231-238.

Мамедов К.Ш., Мамедов Н. Н., Понятия гарантированного решения и нахождения его в задаче Булевого программирование. «Доклады» НАН Азербайджана, 2012, №6, ст. 19-26. (На Азерб. языке.)

13. Мамедов К.Ш., Мамедов Н. Н., Алгоритмы построения гарантированного решения и гарантированного приближенного решения многомерной задачи о ранце. Международный научно-технический журнал «Проблемы Управления и Информатики» 2014, № 5, с. 30-37 .
14. K. Sh. Mamedov, N. N. Mamedov “Guaranteed Solution and its Finding in the Integer Programming Problems” International Journal of Applied Science and Technology Vol. 5, No. 4, August 2015, p. 46-54.
15. Мамедов К.Ш., Мамедов Н. Н Понятие гарантированного решения по функционалу для многомерной задачи о ранце . Международный научно-технический журнал «Радиоэлектроника, информатика, управление» 2018, № 1(44), с. 167-174 .
16. Мамедов К.Ш., Мамедов Н. Н., Методы нахождения гарантированного решения и гарантированного субоптимального решения в задаче целочисленного прогрпммирование. Баку- «Элм», 2018, 206 ст. . (На Азерб. языке.)